预处理 P = (I + C) 后双分裂下的 SOR 迭代法收敛性*

王慧勤，雷　刚
（宝鸡文理学院数学系，陕西 宝鸡 721013）

摘　要：针对预处理方法求解大型稀疏线性方程组 $Ax = b$，在以往选择预处理因子的基础上，结合矩阵分析、分裂理论，给出不同以往的两种预处理后含参数形式的 SOR 迭代方法分裂形式，证明新分裂形式能够使 SOR 迭代法收敛，并得到收敛速度优于一般的预处理方法，最后找到参数的最优取值。

关键词：预处理；收敛性；SOR 迭代法；M – 矩阵
中图分类号：O241.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529 – 6579（2013）06 – 0034 – 04

The Convergence of the SOR Iterative Method in Two Tapes Splitting in Preconditioned P = (I + C)

WANG Huiqin, *LEI Gang*
(Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China)

Abstract: For iterative method to solving the linear system $Ax = b$ in the preconditioned, on the basis of selecting the preconditioned factors in the past by using matrix iterative analysis and comparison theorems, two types of the split form with parameters are given. The new splitting methods not only can make the SOR iterative method convergence, but also can make the convergence rate better than the general preconditioned SOR method, and finally find the optimal values of the parameters.

Key words: precondition; convergence; the SOR iteration method; M-matrix

在科学与工程计算的数学和物理学许多领域，如流体力学计算、有限元分析中的结构与非结构问题、石油地震数据处理、数值天气预报、电力系统优化设计等问题的数值解等都归结为线性代数方程组的求解，特别是大型稀疏（即方程中许多未知量的系数为 0）线性方程组的求解处于核心的地位。如在近年来流行的油藏数值模拟软件中，其解法器部分设计油藏模拟方程离散化后得到的大型稀疏线性方程组的求解，这个代数方程的求解占据了 80% 以上的计算量，是整个问题计算的瓶颈。大量的数据和资料显示，线性方程组的求解时间在整个问题的总计算时间中占有非常大的比重，近年来许多学者提出运用预处理的方法来加快迭代法的收敛性。

1　预备知识

在用 SOR 迭代法求解大型线性方程组 $Ax = b$ 时（其中 A 是 n 阶方阵，x, b 是 n 维向量），常用文［1］中提到的因子 $P = (I + C)$ 来加速或改善迭代法的收敛性。也就是对方程组两边分别左乘 P（称为预处理因子），转化为

$$PAx = Pb \tag{1}$$

其中 I 为 n 阶单位矩阵，C 为方阵，满足

$$C = \begin{cases} -a_{i1} & i = 2, 3, \cdots, n \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$a_{21}, a_{31}, \cdots, a_{n1}$ 分别是方程组系数矩阵 A 对应位置上的元素。通常的处理方法是将矩阵 A 分裂为对角矩阵、严格上三角矩阵和严格下三角矩阵三部

* 收稿日期：2013 – 03 – 05
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10071048）；宝鸡文理学院重点项目基金资助项目（ZK11015）
作者简介：王慧勤（1979 年生），女；研究方向：数据挖掘与数值分析；E-mail：lg3048@126.com

分[2]，不妨设 $A = I - L - U$。那么求解方程组的 SOR 迭代法的迭代矩阵为

$$T = M^{-1}N \tag{2}$$

其中 $M = (I - \omega L), N = [(1-\omega)I + \omega U]$。通常用迭代矩阵 T 的谱半径 $\rho(T) < 1$ 来确定迭代法收敛，而且 $\rho(T)$ 越小，收敛速度就越快。

常见的预处理形式是在因子 P 作用下，对方程组的系数矩阵 PA 做类似于系数矩阵 A 的分解[2-3]，令 $PA = I_0 - L_0 - U_0$，这里 $I_0 = (I - D_1)$，$L_0 = (L - C + L_1), U_0 = (U + U_1)$ 分别是矩阵 PA 的对角线部分、严格下三角部分和严格上三角部分，其中 D_1, L_1, U_1 是 CU 的对应的三部分分解。那么相应地 SOR 方法的迭代矩阵为

$$T_C = M_C^{-1}N_C \tag{3}$$

这里 $M_C = (I - D_1) - \omega(L - C + L_1)], N_C = [(1-\omega)(I - D_1) + \omega(U + U_1)]$。

一般情况下选择在预处理因子 P 的目的是加快迭代法的收敛速度，许多学者通过选取不同的预处理因子来加快 SOR 迭代法的收敛速度，本文在预处理的基础上，首先改变原有的矩阵分裂形式，然后引入参数使得分裂形式更加一般化，寻找参数的取值范围来加快迭代法的收敛性。

引入参数 α 和 β，利用矩阵分裂理论，将矩阵 PA 分裂为

$$PA = \frac{1}{\omega}(M_{C\alpha} - N_{C\alpha})$$

和

$$PA = \frac{1}{\omega}(M_{C\beta} - N_{C\beta})$$

两种形式，其中，

$$M_{C\alpha} = (I - \alpha D_1) - \omega(L - C + L_1),$$
$$N_{C\alpha} = [(I - \alpha D_1) - \omega(I - D_1) + \omega(U + U_1)],$$
$$M_{C\beta} = \beta(I - D_1) - \omega(L - C + L_1),$$
$$N_{C\beta} = [(\beta - \omega)(I - D_1) + \omega(U + U_1)]$$

则在这两类分裂下的 SOR 迭代法的迭代矩阵为

$$T_{C\alpha} = M_{C\alpha}^{-1}N_{C\alpha} \tag{4}$$

$$T_{C\beta} = M_{C\beta}^{-1}N_{C\beta} \tag{5}$$

容易知道当 $\alpha = 1, \beta = 1$ 时，(4) 和 (5) 式就是常见预处理后的分裂形式 (3) 式。

2　定义和引理

定义 1[4]　设 $n \times n$ 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的阶 $n \geqslant 2$，称 A 是不可约的，如果对集合 $W = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的任意两个非空不相交的子集 S 和 T，$S + T = W$，都有 i 和 j 满足 $i \in S$，$j \in T$，使 $a_{ij} \neq 0$，否则称 A 为可约的。

定义 2[5]　如果 $n \times n$ 阶矩阵 A 能表示为 $A = sI - B$，I 为 n 阶的单位矩阵，$B \geqslant 0$，当 $s \geqslant \rho(B)$ 时，称 A 为 M -矩阵，特别称 $n \times n$ 阶矩阵 A 为奇异 M -矩阵，当 $s = \rho(B)$ 时；称 $n \times n$ 阶矩阵 A 为非奇异的 M -矩阵，当 $s > \rho(B)$ 时，其中 $\rho(B)$ 为 B 的谱半径。

定义 3[5]　所有 $n \times n$ 阶的实矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 所组成的集合为 $\mathbf{R}^{n\times n}$，其中 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的子集

$$Z^{n\times n} = \{A = (a_{ij})_{n\times n} | A \in \mathbf{R}^{n\times n},$$
$$a_{ij} \leqslant 0, (\forall i, j, i \neq j)\}$$

当 $A \in \mathbf{Z}^{n\times n}$，并且 $a_{ii} > 0 (\forall i)$ 成立时，称矩阵 A 为 L-矩阵。

引理 1[6]　(Perron-Frobenius 定理) 如果 A 为 $n \times n$ 阶非负方阵，那么

(i) 矩阵 A 有非负特征值等于它的谱半径 $\rho(A)$；

(ii) 矩阵 A 有与谱半径 $\rho(A)$ 相对应的非负特征向量；

(iii) 当矩阵 A 的任一元素增加时，谱半径 $\rho(A)$ 不减。

引理 2[7]　设 $n \times n$ 阶矩阵 A 为非负矩阵，则

(i) 如果对常数 α，满足 $\alpha x \leqslant Ax$ 对某一个非负向量 x 且 $x \neq 0$ 成立，那么就有 $\alpha \leqslant \rho(A)$；

(ii) 如果对常数 β，$Ax \leqslant \beta x$ 对某一个正向量 x 成立，那么就有 $\rho(A) \leqslant \beta$，进一步，如果矩阵 A 不可约且有 $0 \neq \alpha x \leqslant Ax \leqslant \beta x, \alpha x \neq Ax, Ax \neq \beta x$ 对某一个 n 阶非负向量 x 成立，那么就有 $\alpha < \rho(A) < \beta$。

3　主要结果及证明

定理 1　设线性方程组的系数矩阵 A 是非奇异不可约 M -矩阵，且 $0 < a_{i1}a_{1i} < 1$，$i = 2, 3, \cdots, n$，$\omega \in (0, 1)$，$T, T_{C\alpha}$ 和 $T_{C\beta}$ 分别由式 (2)，(4) 和 (5) 给出的 SOR 迭代法的迭代矩阵，那么在迭代矩阵 T 的谱半径 $\rho(T) < 1$ 时有

(i) 当 $1 \leqslant \alpha < \min\left\{\dfrac{1-\omega}{a_{i1}a_{1i}} + \omega\right\}$，$i = 2, 3, \cdots, n$ 时，有 $\rho(T_{C\alpha}) \leqslant \rho(T)$；

(ii) 当 $0 < \omega \leqslant \beta \leqslant 1$ 时，有 $\rho(T_{C\beta}) \leqslant \rho(T)$。

证明　首先证明对满足题设条件的非奇异不可约 M -矩阵 A 在 $\omega \in (0, 1)$ 时，有

$$(N_{C\alpha} - \rho(T)M_{C\alpha})x =$$
$$(\rho(T) - 1)[\alpha D_1 + C(1 - \omega) + \omega L_1]x$$

其中 x 为与 $\rho(T)$ 对应的正特征向量，$\alpha \geqslant 1$。

由于 A 为非奇异不可约 M －矩阵，易知（4）式对应的 SOR 迭代矩阵是非负不可约的，且 $[(1-\omega)I+\omega U]x=\rho(T)(I-\omega L)x$，结合 $CL=0$，有

$$\omega CUx=[\rho(T)C(1-\omega)L-(1-\omega)CI]x=[\rho(T)C-(1-\omega)C]x$$

所以

$$\begin{aligned}&(N_{C\alpha}-\rho(T)M_{C\alpha})x=\\&\{[(I-\alpha D_1)-\omega(I-D_1)+\omega(U+U_1)]-\rho(T)[(I-\alpha D_1)-\omega(L-C+LL_1)]\}x=\\&[-(\alpha-\omega)D_1+\alpha\rho(T)D_1+\omega U_1-\rho(T)\omega C+\rho(T)\omega L_1]x=\\&[\alpha(\rho(T)-1)D_1+\omega(D_1+U_1+L_1)-\rho(T)\omega C+(\rho(T)-1)\omega L_1]x=\\&[\alpha(\rho(T)-1)D_1+(\rho(T)-1)C(1-\omega)+(\rho(T)-1)\omega L_1]x=\\&(\rho(T)-1)[\alpha D_1+C(1-\omega)+\omega L_1]x\end{aligned}$$

从而上述结论成立。

另由文［8］的引理 3 知，T 是一个不可约的非负矩阵，再由引理 1 知，存在一个正向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，满足 $Tx=\rho(T)x$，即

$$[(1-\omega)I+\omega U]x=(I-\omega L)\rho(T)x$$

在 $1\leqslant\alpha<\min\left\{\dfrac{1-\omega}{a_{i1}a_{1i}}+\omega\right\}$，$i=2,3,\cdots,n$，结合矩阵 A 的特点可知 $\boldsymbol{M}_{C\alpha}^{-1}\geqslant 0$，并且 $N_{C\alpha}>0$。考虑 $T_{C\alpha}-\rho(T)x=M_{C\alpha}^{-1}N_{C\alpha}x-\rho(T)x=M_{C\alpha}^{-1}(N_{C\alpha}-\rho(T)M_{C\alpha})x$，从而结合上述证明有

$$\begin{aligned}&T_{C\alpha}-\rho(T)x=M_{C\alpha}^{-1}N_{C\alpha}x-\rho(T)x=\\&M_{C\alpha}^{-1}(N_{C\alpha}-\rho(T)M_{C\alpha})x=\\&[(I-\alpha D_1)-\omega(L-C+L_1)]^{-1}(\rho(T)-1)\cdot[\alpha D_1+C(1-\omega)+\omega L_1]x\end{aligned}$$

所以在 $\rho(T)<1,\omega\in(0,1)$ 时，有 $T_{C\alpha}-\rho(T)x\leqslant 0$，但 $T_{C\alpha}-\lambda x\neq 0$，因此，由引理 2 可得 $\rho(T_{C\alpha})\leqslant\rho(T)$。

在矩阵和迭代法满足相同的条件下可以证明当 $0<\omega\leqslant\beta\leqslant 1$ 时有

$$\begin{aligned}&(N_{C\beta}-\rho(T)M_{C\beta})x=\\&(\rho(T)-1)[(1-\beta)(I-D_1)+D_1+\omega L_1]x\end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned}&T_{C\beta}-\rho(T)x=M_{C\beta}^{-1}N_{C\beta}x-\rho(T)x=\\&M_{C\beta}^{-1}(N_{C\beta}-\rho(T)M_{C\beta})x=\\&[\beta(I-D_1)-\omega(L-C+L_1)]^{-1}(\rho(T)-1)\cdot[(1-\beta)(I-D_1)+D_1+\omega L_1]x\end{aligned}$$

因此在 $\rho(T)<1$，$\omega\in(0,1)$ 时，有 $T_{C\beta}-\rho(T)x\leqslant 0$，但 $T_{C\alpha}-\lambda x\neq 0$，因此，由引理 2 可得 $\rho(T_{C\beta})\leqslant\rho(T)$。

定理 2 设线性方程组的系数矩阵 A 是非奇异不可约 M －矩阵，且 $0<a_{i1}a_{1i}<1,i=2,3,\cdots,n$，$\omega\in(0,1)$，$T_C$，$T_{C\alpha}$ 和 $T_{C\beta}$ 分别由式（3）、（4）和（5）给出的 SOR 迭代法的迭代矩阵，那么迭代矩阵 T 的谱半径当 $\rho(T)\geqslant 1$ 时，

（i）对任意 $1\leqslant\alpha<\min\left\{\dfrac{1-\omega}{a_{i1}a_{1i}}+\omega\right\}$，$i=2,3,\cdots,n$，有 $\rho(T_{C\alpha})\geqslant\rho(T_C)$；

（ii）对任意 $0<\omega\leqslant\beta\leqslant 1$，有 $\rho(T_{C\beta})\geqslant\rho(T_C)$。

当迭代矩阵 T 的谱半径 $\rho(T)<1$ 时有

（iii）对任意 $1\leqslant\alpha<\min\left\{\dfrac{1-\omega}{a_{i1}a_{1i}}+\omega\right\}$，$i=2,3,\cdots,n$，有 $\rho(T_{C\alpha})<\rho(T_C)$；

（iv）对任意 $0<\omega\leqslant\beta\leqslant 1$，有 $\rho(T_{C\beta})<\rho(T_C)$。

证明 根据参数 $1\leqslant\alpha$，可知矩阵 $(I-D_1)-(L-C+L_1)\geqslant(I-\alpha D_1)-(L-C+L_1)$，则相应的逆矩阵就有 $[(I-D_1)-(L-C+L_1)]^{-1}\leqslant[(I-\alpha D_1)-(L-C+L_1)]^{-1}$，又由文［9－10］中的引理 3 知，迭代矩阵 T_C 是非负矩阵，再结合引理 1 可知其谱半径是它的一个特征值，且有与之相对应的非负特征向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，满足 $T_Cx=\rho(T_C)x$。从而

$$\begin{aligned}&T_{C\alpha}x-\rho(T_C)x=T_{C\alpha}x-T_Cx=\\&(T_{C\alpha}x-\rho(T)x)-(T_Cx-\rho(T)x)\geqslant\\&M_{C\alpha}^{-1}[(N_{C\alpha}-\rho(T)M_{C\alpha})-(N_C-\rho(T)M_C)]x=\\&M_{C\alpha}^{-1}(\rho(T)-1)(\alpha-1)D_1x\end{aligned}$$

即

$$T_{C\alpha}x-\rho(T_C)x\geqslant[(I-\alpha D_1)-\omega(L-C+L_1)]^{-1}\cdot(\rho(T)-1)(\alpha-1)D_1x$$

所以，当 $\rho(T)\geqslant 1$ 时，上述不等式右端大于零，从而 $\rho(T_{C\alpha})\geqslant\rho(T_C)$；

另一方面，又由于

$$\begin{aligned}&T_{C\alpha}x-\rho(T_C)x=T_{C\alpha}x-T_Cx=\\&(\rho(T)x-T_Cx)-(\rho(T)x-T_{C\alpha}x)\leqslant\\&M_C^{-1}[(\rho(T)M_C-N_C)-(\rho(T)M_{C\alpha}-N_{C\alpha})]x=\\&M_C^{-1}(\rho(T)-1)(\alpha-1)D_1x\end{aligned}$$

所以，当 $\rho(T)<1$ 时，上述不等式右端小于零，所以 $\rho(T_{C\alpha})<\rho(T_C)$。

类似地可以证明当 $0<\omega\leqslant\beta\leqslant 1$ 时有上述的结论成立。

注 1 从上述的证明可以看出，当 $\rho(T)<1$ 时，如果将不同的 $\alpha_j(j=1,2)$ 下的迭代矩阵（4）

式的谱半径记为 $\rho(T_{C\alpha j})$，那么当 $1 \leqslant \alpha_j < \min\left\{\frac{1-\omega}{a_{i1}a_{1i}}+\omega\right\}$，$i = 1,2,\cdots,n-1$，$j = 1,2$，且 $\alpha_1 > \alpha_2$ 时，有 $\rho(T_{C\alpha 1}) \leqslant \rho(T_{C\alpha 2})$。同理可得当 $\rho(T) < 1$ 时，在 $\beta_j(j = 1,2)$ 下的迭代矩阵（5）式的谱半径为 $\rho(T_{C\beta j})$，对不同的 β_j，当 $0 < \omega \leqslant \beta_j \leqslant 1$ 且 $\beta_1 < \beta_2$ 时，有 $\rho(T_{C\beta 1}) \leqslant \rho(T_{C\beta 2})$。

4　数值例子

例 1　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的表达式如下所示：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & 0 & -0.3 \\ -0.2 & 0 & 1 & -0.2 \\ -0.4 & -0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

计算可知，以 $\boldsymbol{A}$ 为线性方程组的系数矩阵，对不同的当 ω,α 时，谱半径的比较如表 1。

表 1　不同参数的迭代法谱半径

Table 1　comparison of the spectral radius in different parameters values

ω	$\rho(T)$	$\rho(T_C)$	α	$\rho(T_{C\alpha})$	β	$\rho(T_{C\beta})$
0.6	0.775 1	0.624 9	1	0.629 4	1	0.629 4
0.6	0.775 1	0.624 9	2	0.609 1	0.9	0.572 9
0.6	0.775 1	0.624 9	3	0.572 3	0.8	0.502 9
0.6	0.775 1	0.624 9	4	0.554 1	0.7	0.402 2
0.6	0.775 1	0.624 9	5	0.528 2	0.6	0.232 5
0.6	0.775 1	0.624 9	6	0.501 6	0.3	1.025 8
0.1	0.865 3	0.801 2	4	0.764 5	0.1	0.801 2

从表 1 可以看出，对给定的 ω，文中给出的迭代法（4）随着 α 的增大其谱半径在减小，迭代法（5）随着 β 的减小其谱半径也在减小，并且当 $\omega = \beta$ 时谱半径达到最小；对不同的 β，当 $\beta = 0.3$ 时，迭代法就不收敛。不论 ω,β 如何变化，都可以得到当 $\omega = \beta$ 时这种新的迭代法的谱半径达到最小。而且两种迭代法的收敛速度都较一般的预处理迭代收敛速度快。另外，数据试验发现，尽管迭代法（4）随着 α 的增大其谱半径在减小，而且当 $\alpha_j > \min\left\{\frac{1-\omega}{a_{i1}a_{1i}}+\omega\right\}$ 时，谱半径还会进一步的减小然后再随着 α 的增大而增大，α 限制的原因是非负矩阵理论引起的，如何证明在 α 超出该范围时收敛性更好还有待解决。

5　结　语

利用参数 α，β，给出预处理后 SOR 迭代法的两类新的分裂形式，与常见的预处理后 SOR 迭代法收敛速度进行比较，得到较好结果，并找到参数的最优取值，对科学计算中遇到的线性方程组的求解问题提供理论支持，同时也为今后在求解线性方程组时可以从预处理因子和分裂形式两方面选择来加速迭代法收敛性提供帮助。

参考文献：

[1] YUN J H. A note on the modified SOR method for Z-matrices [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 194: 572 – 576.

[2] NIKI H, HARADA K, MORIMOTO M, et al. The survey of preconditioners used for accelerating the rate of convergence in the Gauss-Seidel method [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004, 165: 587 – 600.

[3] HUANG T Z, CHENG G H, CHENG X Y. Modified SOR-type iterative method for Z-matrices [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 175: 258 – 268.

[4] 张谋成，黎稳. 非负矩阵论[M]. 广州：广东高等教育出版社，1995.

[5] YONG D M. Iterative solution of large linear systems [M]. New York: Academic Press, 1971.

[6] VARGA R S. Matrix iterative analysis [M]. Heidelberg: Spring-Verlag, 2000.

[7] LIU Q B, CHEN G L, CAI J. Convergence analysis of the preconditioned Gauss-Seidel method for H-matrices [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56: 2048 – 2053.

[8] YUN J H. Convergence of SSOR multisplitting method for an H-matrix [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 217: 252 – 258.

[9] WANG X Z, HUANG T Z, FU Y D. Comparison results on preconditioned SOR-type iterative method for Z-matrices linear systems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 206: 726 – 732.

[10] LI W. Comparison results for solving preconditioned linear systems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2005, 176: 319 – 329.